Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 7, No. 2, p. 8– 16
ISSN 2453-6083

Vizualizácia funkcií užitočnosti

Visualization of Utility Functions

Janka Drábeková[a]

[a*]*Institute of Statistics, Operation Research and Mathematics, Faculty of Economics and Management, Slovak University of Agriculture in Nitra, Tr. A. Hlinku 2, Nitra, Slovakia*

Received November 2, 2021; received in revised form November 9, 2021; accepted November 10, 2021

Abstract

The graph of a function belongs to the basic objects of visualization not only in mathematical analysis but also in economics, because the "language" of graphs is one of the ways of presenting economic ideas. In this paper, we focused on the creation of interactive materials usable in teaching the theory of rational behavior of elementary economic entities, consumers. We assume that the created interactive constructions can contribute to the easy acquisition of concepts from the theory of the consumer. We used GeoGebra software to create visual representations of consumer preferences. We analyze the different consumer's indifference curves, perfect substitutes, Cobb-Douglas utility function, constant elasticity of substitution (CES) preferences and marginal rate of consumer substitution.

Keywords: visualization, utility functions, GeoGebra, graphs, microeconomics.

Classification: 97C80, 97U70

Úvod

Každý z nás už počul frázu „A Picture is Worth a Thousand Words“. Podľa Fuliera (2018) o sile pôsobenia vizuálnych obrazov svedčí skutočnosť, že aj celkom jednoduché až triviálne obrazy môžu vyjadrovať hlboké a komplexné myšlienky. Myslenie založené na obrazových vnemoch, predstavách, pomáha v matematickom vzdelávaní budovať u žiakov abstraktný pojmový aparát a riešiť nielen manipulatívne matematické úlohy.

Schopnosť tvorenia, interpretácie, používania a reflexie obrazov, predstáv, schém v našich mysliach, na papieri alebo s použitím technologických nástrojov, s cieľom opisovať a komunikovať informácie, myslieť a rozvíjať doposiaľ neznáme myšlienky a nasledujúce pochopenia vymedzuje podľa Arcavi (2003) pojem *vizualizácia*.

Tall & Vinner (1981) hovoria o vizualizácii ako o dôležitej súčasti tzv. *„pojmových obrazov“*. Podľa Yilmaz, Argun (2018) je vizualizácia silným nástrojom na vyhľadávanie matematických problémov, ktorý dáva význam matematickým konceptom a vzťahom medzi nimi. Avšak treba si uvedomiť, že vo vzdelávaní musí mať nezastupiteľné miesto využívanie nielen názorného, ale aj abstraktnému prístupu. Názorný prístup pomôže k zefektívneniu vyučovacieho procesu, ale schopnosť aplikovať vedomosti na nový kontext alebo situáciu predpokladá používanie vizuálnych aj algoritmických techník.

Matematické vzťahy, grafy a diagramy sú základom pre získanie matematických vedomostí a výpočtových zručností (Országhová & Žiaková, 2021). Vizuálna reprezentácia má pre jedinca

*Corresponding author: janka.drabekova@uniag.sk
DOI: 10.17846/AMN.2021.7.2.8-16

hodnotu tisíc slov, iba vtedy, ak ju dokáže flexibilne použiť (Rösken & Rolka, 2006). Z aspektu vzdelávania umožňuje prepojenie vizuálnej reprezentácie s dôležitými kvantitatívnymi a kvalitatívnymi stránkami skúmaného javu ľahšie a častokrát aj trvácnejšie uloženie kľúčových informácií do dlhodobej pamäti vzdelávaných subjektov (Fulier, 2018).

Vizualizácia v ekonómii

Graf funkcie patrí k základným objektom vizualizácie nielen v matematickej analýze, ale aj v ekonómii, pretože „jazyk" grafov je jedným zo spôsobov prezentácie ekonomických myšlienok. V ekonómii sa grafy využívajú k názornej ilustrácii ekonomických princípov a trendov, ktoré sa pokúša vysvetliť.

V tomto príspevku sme sa zamerali na tvorbu interaktívnych materiálov využiteľných pri výučbe teórie racionálneho správania elementárnych ekonomických subjektov, spotrebiteľov. Za racionálneho spotrebiteľa sa v mikroekonómii považuje taký ekonomický subjekt, ktorý si na trhu vyberá „najvýhodnejšie" spotrebné stratégie spomedzi všetkých pre neho dostupných. Dostupnosť je ovplyvnená jeho príjmom a trhovými cenami statkov. Nie je nutné porovnávať všetky kombinácie statkov, ktoré si spotrebiteľ môže kúpiť, pretože pomocou grafu funkcie užitočnosti môžeme jednoduchým spôsobom znázorniť jeho preferencie medzi týmito kombináciami. Funkcia užitočnosti vyjadruje preferencie spotrebiteľa pri jeho rozhodovaní. Priraďuje určitú hodnotu každému prípustnému spotrebnému košu tak, aby preferovanejším spotrebným košom bola priradená vyššia hodnota než menej preferovaným spotrebným košom (Varian, 2014).

Grafickou ilustráciou preferencií spotrebiteľov sú indiferenčné krivky. Indiferenčná krivka graficky zobrazuje všetky kombinácie tovarov, ktoré poskytujú spotrebiteľovi rovnakú úroveň úžitku. Priebeh indiferenčnej krivky v danom bode, v absolútnom vyjadrení, predstavuje hraničnú mieru spotrebiteľskej substitúcie (MRS – marginal rate of consumer substitution). Hodnota MRS nám určí, koľko jednotiek druhého statku je daný spotrebiteľ ochotný vymeniť za získanie dodatočnej jednotky prvého statku pri nezmenenej úrovni úžitku. Z matematického hľadiska teda pracujeme pri tomto pojme s hodnotou prvej derivácie funkcie užitočnosti v konkrétnom bode. Ak hľadáme optimálnu stratégiu spotrebiteľa, hľadáme bod dotyku rozpočtovej priamky spotrebiteľa a funkcie užitočnosti, t.j. študenti musia poznať geometrický význam derivácie funkcie, aby im bol jasný tento koncept.

Funkcia užitočnosti pre dokonalé substitúty

Ak je spotrebiteľ ochotný zameniť jeden statok za druhý v konštantnom pomere, nazývame tieto statky dokonalé substitúty.

Spotrebiteľ má rovnaký úžitok pri spotrebných košoch s rovnakým celkovým počtom oboch statkov v prípade spotrebovávania statkov v pomere 1:1. Ak je nútený z rôznych dôvodov znížiť spotrebu prvého statku, vôbec mu to nevadí, lebo zvýši spotrebu druhého statku a jeho úroveň užitočnosti zostane rovnaká.

Grafickou ilustráciou takýchto preferencií spotrebiteľa sú priamky so smernicou $k = -1$ (obr.1). Ak spotrebiteľ zníži spotrebu prvého statku o jednu jednotku, musí zvýšiť spotrebu druhého statku o jednu jednotku, aby sa dostal na rovnakú indiferenčnú krivku a zachoval si rovnakú úroveň úžitku.

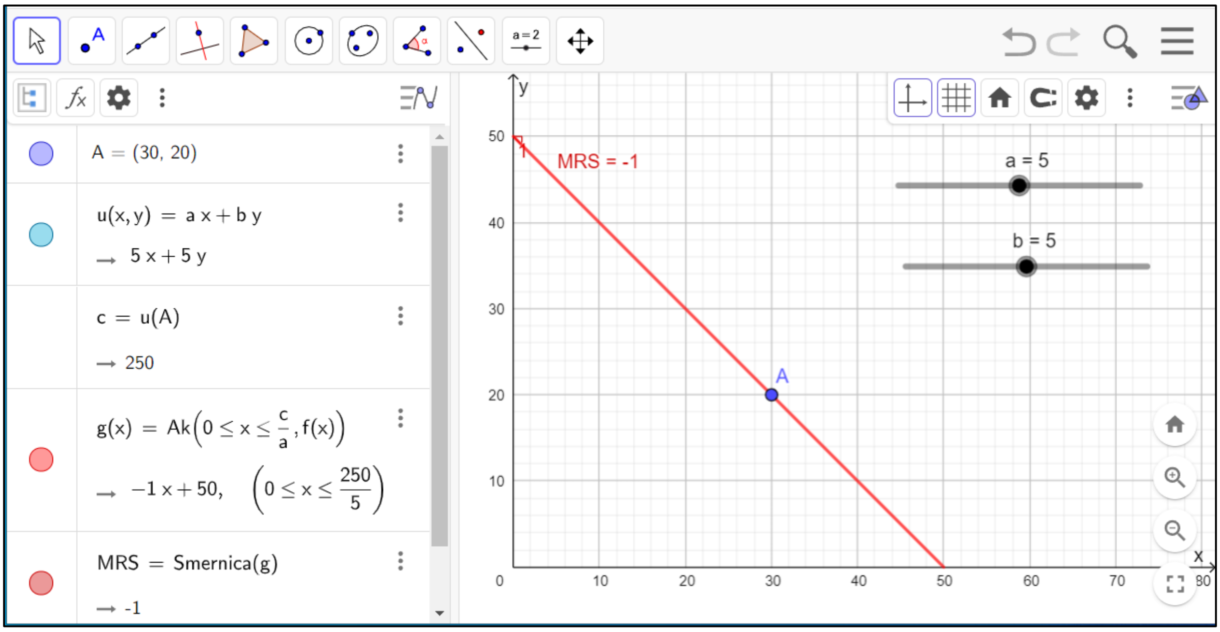
Pri zápise funkcie užitočnosti treba myslieť na skutočnosť, že nie všetky substitúty sa spotrebovávajú v pomere $1:1$. Funkcia užitočnosti má v prípade dokonalých substitútov tvar:

$$u(x, y) = ax + by$$

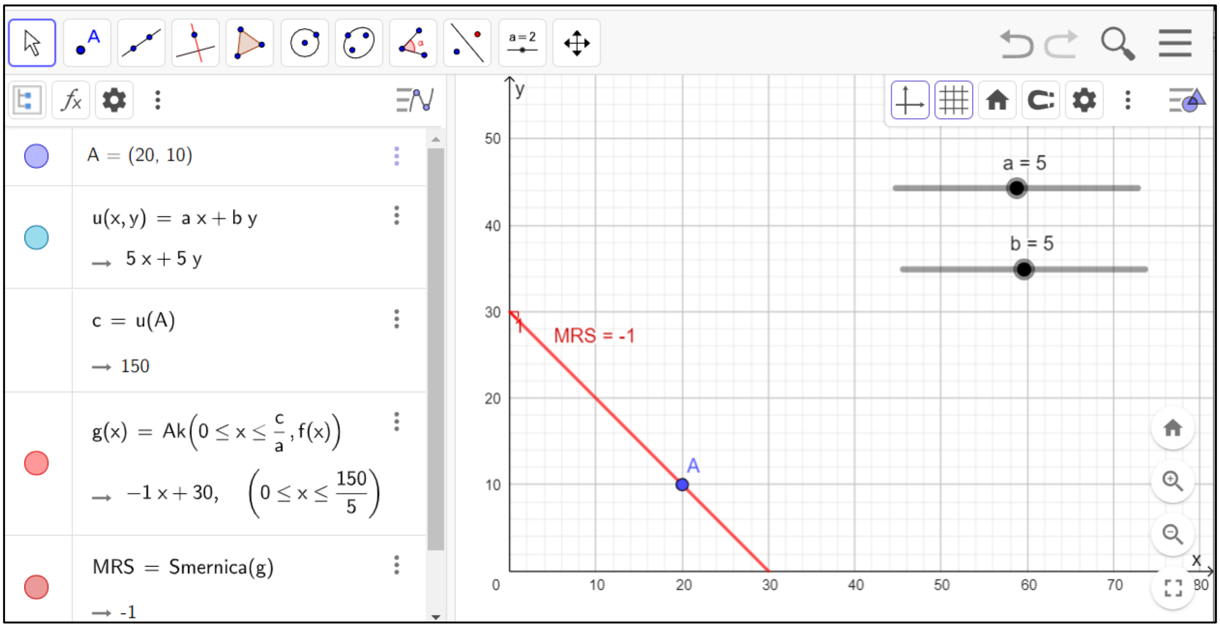
Dynamická konštrukcia (obr.1, obr.2) vytvorená pomocou softvéru GeoGebra ilustruje rôznu úroveň užitočnosti $c = u(A)$ pri rôznych spotrebných košoch $A[x, y]$ a nezmenenej hodnote MRS, ak $a: b = 1: 1$.

Spotrebný kôš s vyšším počtom oboch statkov $A[30,20]$ je preferovaný pred spotrebným košom s nižším celkovým počtom oboch statkov $A[20,10]$, lebo pre spotrebiteľa prináša vyššiu hodnotu úžitku:

$$A[30,20] \succ A[20,10] \Leftrightarrow u(30,20) > u(20,10)$$



Obr. 1: *Funkcia užitočnosti dokonalých substitútov spotrebovávaných v pomere 1:1*

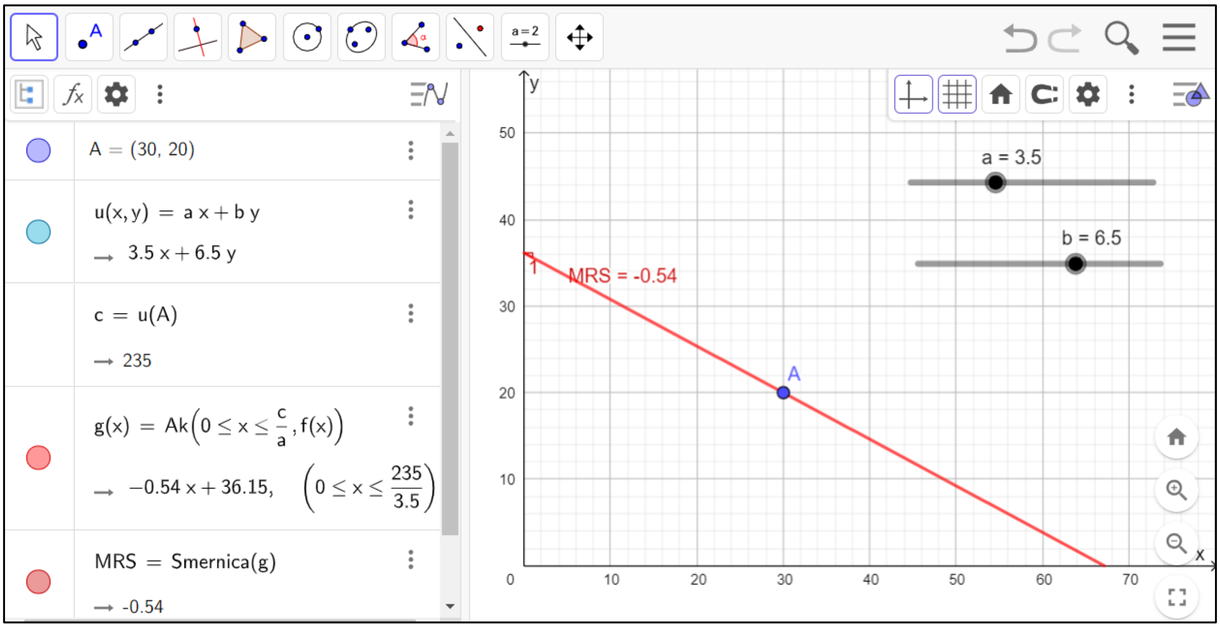


Obr. 2: *Zmena hodnoty funkcie užitočnosti dokonalých substitútov vzhľadom na zmenu spotrebného koša*

Na obr.3 je prezentované ako zmena pomeru $a\colon b$ na hodnotu $3{,}5\colon 6{,}5 = 7\colon 13$ ovplyvní hodnotu smernice funkcie užitočnosti a aj veľkosť úžitku spotrebiteľa pri spotrebnom koši $A[30{,}20]$ rovnakom ako v prvom prípade (znázornenom na obr.1).

V tomto prípade (obr.3) spotrebiteľ preferuje viac druhý statok, lebo je ochotný iba 0,53 jednotiek druhého statku y vymeniť za dodatočnú jednotku prvého statku x.

Hraničná miera spotrebiteľskej substitúcie má nižšiu hodnotu a aj hodnota funkcie užitočnosti je nižšia.



Obr. 3: *Zmena hodnoty funkcie užitočnosti dokonalých substitútov vzhľadom na zmenu MRS*

Cobb-Douglasová funkcia užitočnosti

Preferencie spotrebiteľa vyjadrené pomocou Cobb-Douglasovej funkcie užitočnosti sú štandardným príkladom „well-behaved“ indiferenčných kriviek (Varian, 2014). Cobb-Douglasovú funkciu užitočnosti považovanú za vhodný nástroj prezentácie matematických interpretácií rôznych ekonomických myšlienok môžeme algebricky zapísať v tvare:

$$u(x, y) = x^a \cdot y^b$$

kde koeficienty a, b zachytávajú preferencie spotrebiteľa. Pre tvorbu dynamickej konštrukcie vyjadríme funkčnú závislosť spotreby statku y od spotreby statku x pri užitočnosti $c = u(A)$:

$$f\colon y = \left(\frac{c}{x^a}\right)^{\frac{1}{b}}$$

Využijeme príkaz „Ak(podmienka; funkcia)“ na znázornenie grafu funkcie v prvom kvadrante a znázorníme dotyčnicu v spotrebnej stratégii $A[15{,}10]$.

Dynamická konštrukcia (obr.4, obr.5) vytvorená pomocou softvéru GeoGebra ilustruje rôznu úroveň užitočnosti $c = u(A)$ pri rovnakom spotrebnom koši spotrebiteľa, ale pri rôznych preferenciách t.j. rôznych hodnotách koeficientov a, b.

Zmenou hodnôt koeficientov môžeme sledovať meniace sa preferencie spotrebiteľa a meniace sa hodnoty MRS. Ak $b > a$, spotrebiteľ preferuje viac statok y (obr.4) a $MRS < 1$. Ak je $a > b$, spotrebiteľ preferuje statok x a $MRS > 1$ (obr.5).

Smernicu dotyčnice v absolútnom vyjadrení interpretujeme ako hraničnú mieru spotrebiteľskej substitúcie a jej hodnotu môžeme sledovať nielen v okne nákresne, ale aj v algebraickom zápise rovnice dotyčnice. Výpočtom alebo pomocou príkazov softvéru GeoGebra môžeme overiť, že $MRS = |k_t|$, pretože platí:

$$\frac{dy}{dx}(A) = \frac{-a}{b} \cdot \frac{c^{\frac{1}{b}}}{x^{\frac{a}{b}+1}} = k_t$$

Ak do prvej derivácie funkcie f dosadíme $u(A) = c = x^a \cdot y^b$, po úpravách dostaneme vzťah:

$$\frac{dy}{dx}(A) = \frac{-a}{b} \cdot \frac{y}{x}$$

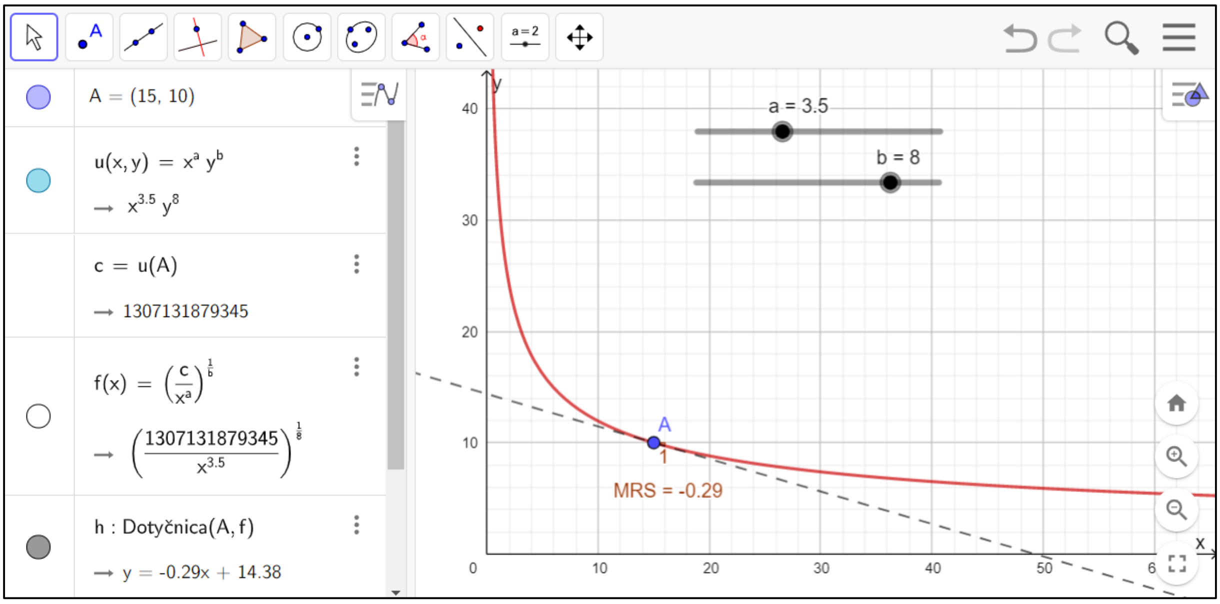
Zároveň vieme, že platí:

$$MRS = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{a x^{a-1} y^b}{b x^a y^{b-1}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}$$

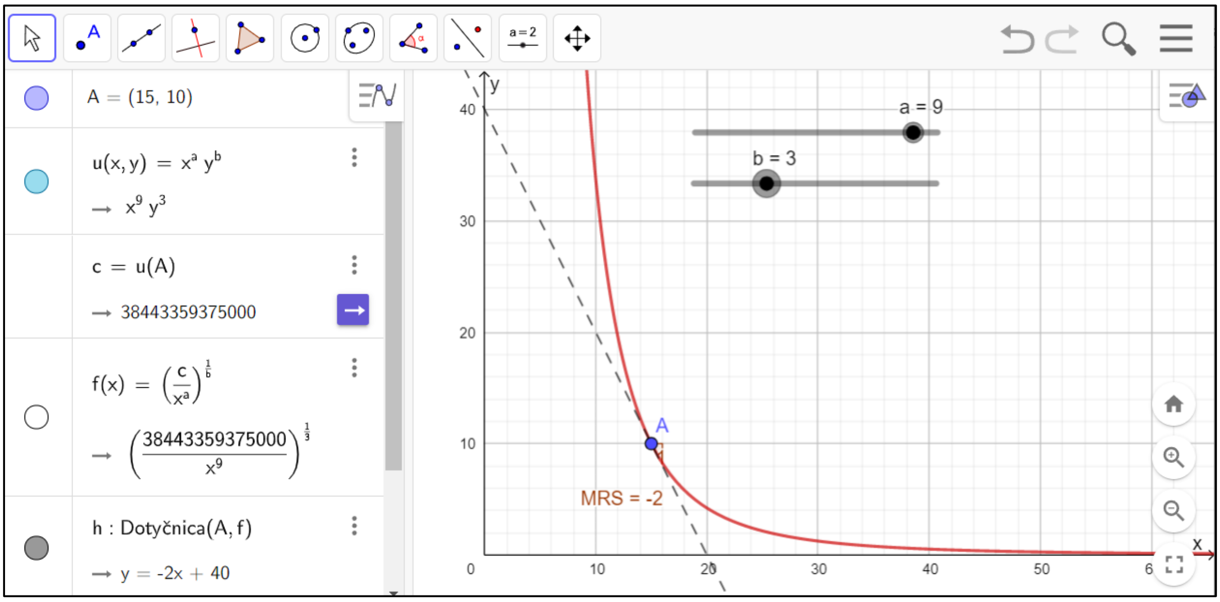
Napríklad pre prípad znázornený na obr.4 potom platí:

$$MRS = \frac{3{,}5}{8} \cdot \frac{10}{15} = \frac{7}{13} = |k_t| = 0{,}291\overline{6}$$

Pomocou vytvorenej dynamickej konštrukcie môžu študenti sledovať ako vplýva zmena spotrebnej stratégie na hodnotu užitočnosti, koeficienty rovnice dotyčnice či hodnotu hraničnej miery spotrebiteľskej substitúcie.



Obr. 4: *Cobb-Douglasová funkcia užitočnosti pri spotrebnej stratégii A*



Obr. 5: *Cobb-Douglasová funkcia užitočnosti pri spotrebnej stratégii A a zmenených koeficientoch a,b*

CES funkcia užitočnosti

V tejto časti sa budeme zaoberať funkciou užitočnosti, ktorá sa vyznačuje konštantnou elasticitou substitúcie (Constant Elasticity of Substitution) medzi statkami.
Funkcia užitočnosti CES sa používa na modelovanie bežných problémov spojených s výberom spotrebiteľov, pretože „pokrýva“ široké spektrum nahraditeľnosti medzi x a y (Thöni, 2015).
Ak je elasticita substitúcie medzi 2 statkami konštantná, môžeme funkciu užitočnosti zapísať v algebraickom tvare:

$$u(x, y) = (ax^r + by^r)^{\frac{1}{r}}$$

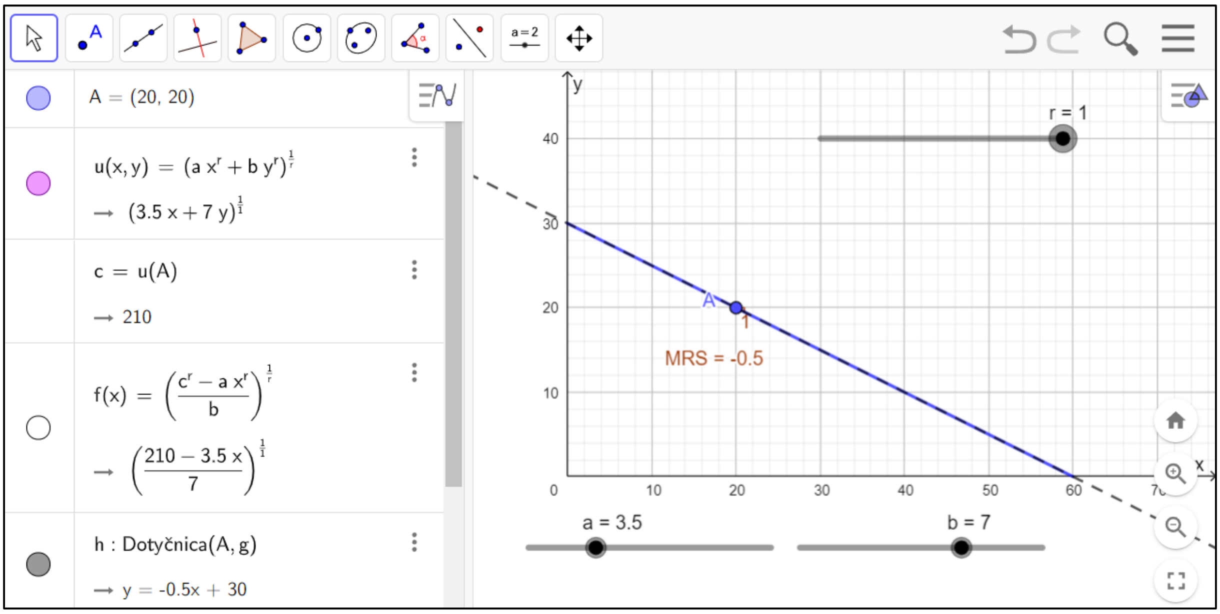
Pre tvorbu dynamickej konštrukcie vyjadríme funkčnú závislosť spotreby statku y od spotreby statku x pri užitočnosti $c = u(A)$:

$$f: y = \left(\frac{c^r}{b} - \frac{a}{b}x^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

Daný vzťah platí pre $r \in (-\infty, 0) \cup (0,1\rangle \wedge a \geq 0 \wedge b \geq 0$.

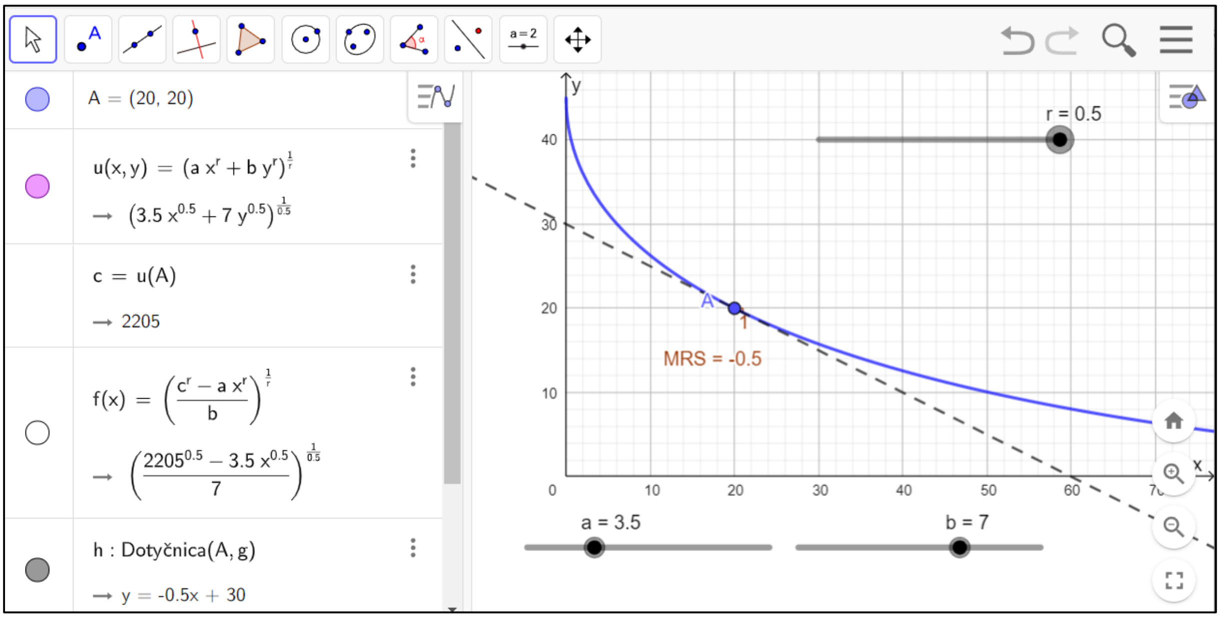
Na znázornenie grafu funkcie v prvom kvadrante opätovne využijeme príkaz „Ak(podmienka; funkcia)“ a znázorníme tiež dotyčnicu v spotrebnej stratégii $A[20,20]$. Dynamická konštrukcia (obr.6, obr.7, obr.8) vytvorená pomocou softvéru GeoGebra ilustruje rôznu úroveň užitočnosti $c = u(A)$ pri rovnakom spotrebnom koši spotrebiteľa, ale pri rôznych hodnotách parametra r.

Pomocou CES funkcie užitočnosti môžeme sledovať rôzne alternatívne stupne nahraditeľnosti x za y. Táto funkcia umožňuje plný rozsah nahraditeľnosti medzi dvoma statkami (Thöni, 2015). Na obr.6 môžeme pozorovať pre hodnotu parametra $r = 1$, že z CES funkcie užitočnosti dostaneme funkciu užitočnosti, ktorá modeluje prípad dokonalých substitútov.

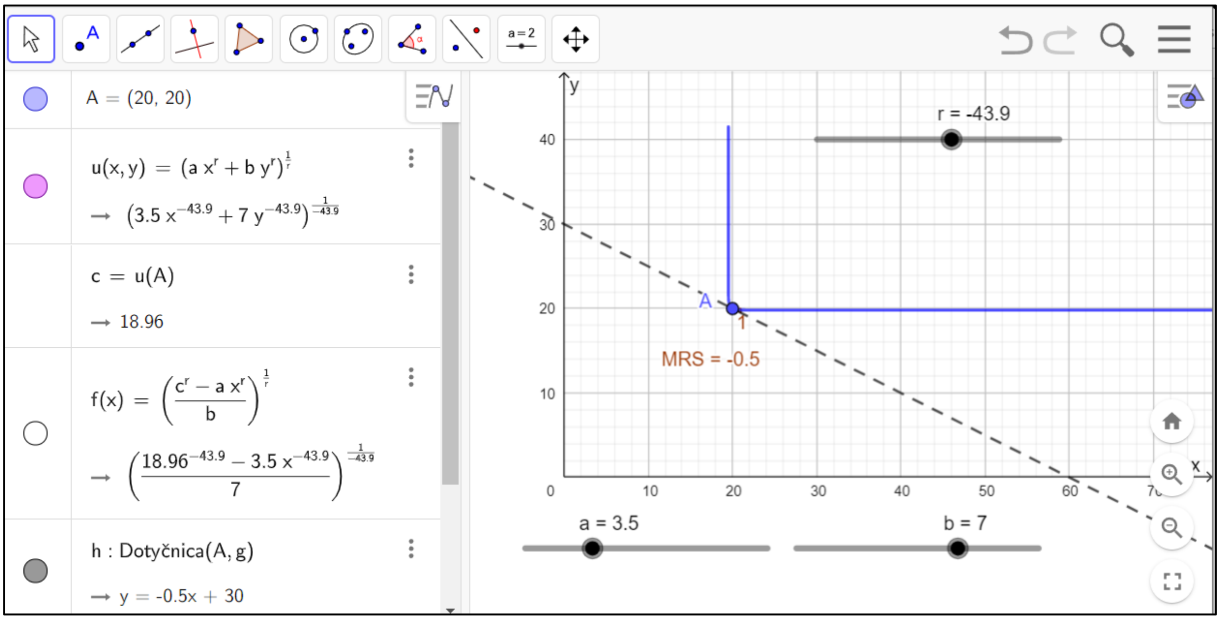


***Obr. 6**: Funkcia užitočnosti pre dokonalé substitúty ako špeciálny prípad CES funkcie*

Ak $r \to 0$, tak CES funkcia konverguje ku Cobb-Douglasovej funkcii užitočnosti (obr.7). A v prípade, že $r \to -\infty$ funkcia aproximuje nulovú možnosť substitúcie, t.j. prípad dokonalých komplementov (obr.8) spotrebovávaných iba v konkrétnom pomere.



***Obr. 7:** Cobb-Douglasová funkcia užitočnosti ako špeciálny prípad CES funkcie*



***Obr. 8:** Funkcia užitočnosti pre dokonalé komplementy ako špeciálny prípad CES funkcie*

Hraničnú mieru spotrebiteľskej substitúcie a jej hodnotu môžeme sledovať v okne nákresne, ako aj v algebraickom zápise rovnice dotyčnice.
Výpočtom môžeme overiť, že hraničná miera spotrebiteľskej substitúcie sa rovná absolútnej hodnote smernice dotyčnice v dotykovom bode $MRS = |k_t|$. Vyjadríme prvú deriváciu funkcie f:

$$\frac{dy}{dx}(A) = \frac{-a}{b} \cdot x^{r-1} \cdot \left(\frac{c^r}{b} - \frac{a}{b}x^r\right)^{\frac{1}{r}-1}$$

Ak do prvej derivácie funkcie f dosadíme $u(A) = c = (ax^r + by^r)^{\frac{1}{r}}$, po úpravách dostaneme vzťah:

$$\frac{dy}{dx}(A) = \frac{-a}{b} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{r-1}$$

Zároveň vieme, že hraničná miera spotrebiteľskej substitúcie je podiel hraničných užitočností:

$$MRS = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{r \cdot a \cdot x^{r-1} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{c^r}{b} - \frac{a}{b}x^r\right)^{\frac{1}{r}-1}}{r \cdot b \cdot y^{r-1} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{c^r}{b} - \frac{a}{b}x^r\right)^{\frac{1}{r}-1}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x^{r-1}}{y^{r-1}}$$

V našom prípade spotrebiteľskej stratégie v bode $A[20,20]$ nadobúda vo všetkých troch prípadoch (obr.6, obr.7, obr.8) MRS rovnakú hodnotu, pretože platí:

$$MRS = \frac{3{,}5}{7} \cdot \left(\frac{20}{20}\right)^{r-1} = \frac{1}{2} \cdot 1^{r-1} = \frac{1}{2} = |k_t|$$

Pomocou vytvorenej dynamickej konštrukcie môžu študenti sledovať vplyv zmeny spotrebiteľskej stratégie, vplyv zmeny hodnôt koeficientov a, b a parametra r na hodnotu užitočnosti a graf funkcie užitočnosti CES.

Záver

V príspevku sme prezentovali spätosť matematických a ekonomických konceptov uplatňovaných v teórii spotrebiteľa. Pri tvorbe obrazovo-názorných reprezentácií sme využívali softvér GeoGebra.

Úlohou vytvorených interaktívnych konštrukcií je prispieť k prirodzenému osvojeniu nových pojmov a zákonitostí o funkciách užitočnosti v celistvosti a v úplnosti. Vytvorené materiály majú uplatnenie vo vyučovacom procese študentov Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre, prípadne aj iných univerzít, v rôznych predmetoch mikroekonomického zamerania. Zároveň vidíme potenciál využitia aj pri štúdiu matematiky v rámci aplikácií geometrického významu derivácie funkcie.

Vytvorené interaktívne študijné materiály sú študentom sprístupnené vo výučbovom prostredí LMS Moodle.

Literatúra

Arcavi, A. 2003. The role of visual representations in the learning of mathematics. In *Educational Studies in Mathematics* [online], 52, 215–241, ISSN 1573-0816 [cit. 2021-10-29]. Available at: https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Fulier, J. 2018. Niekoľko poznámok o aspektoch vizualizácie v matematickom vzdelávaní. In *Acta Mathematica Nitriensia* [online], 4(1), 24-38, ISSN 2453-6083 [cit. 2021-10-08]. Dostupné na: http://www.amn.fpv.ukf.sk/papers/amn_4_1/5_Fulier_AMN_Vol_4_No_1_2018.pdf

Országhová, D. & Žiaková, D. 2021. Outcomes of distance education in Mathematics at secondary technical school: a case study. In *Mathematics in Education, Research and Applications* (MERAA) [online], 7(1), 25-32, ISSN 2453-6881 [cit. 2021-10-28]. Available at: https://doi.org/10.15414/meraa.2021.07.01.25-32

Rösken, B. & Rolka, K. 2006. A picture is worth a 1000 words - the role of visualization in mathematics learning. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [online], Vol. 4, 441-448. Prague, Czech Republic: PME. Available at: https://www.emis.de/proceedings/PME30/4/457.pdf

Tall, D. & Vinner, S. 1981. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In *Educational Studies in Mathematics* [online], 12(2), 151-169, ISSN 1573-0816 [cit. 2021-09-25]. Available at: https://doi.org/10.1007/BF00305619

Thöni, Ch. 2015. A Note on CES Functions. In *Journal of Behavioral and Experimental Economics* [online], 59, 85-87, ISSN 2214-8043 [cit. 2021-10-14]. Available at: https://doi.org/10.1016/j.socec.2015.10.001

Varian, H.R. 2014. *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. Ninth Edition. New York: W.W. Norton & Company, 2014. 825pp. ISBN 978-0-393-12396-8

Yilmaz, R. & Argun, Z. 2018. Role of visualization in mathematical abstraction: The case of congruence concept. In *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology* (IJEMST) [online], 6(1), 41-57, ISSN 2147-611X [cit. 2021-09-25]. Available at: https://doi.org/10.18404/ijemst.328337